Constraint-Programmierung

Grundlagen und Anwendungen

Thom Frühwirth und Slim Abdennadher
Institut für Informatik
Ludwig-Maximilians-Universität
Oettingenstraße 67, 80538 München

{fruehwir,abdennad}@informatik.uni-muenchen.de

www.informatik.uni-muenchen.de/~fruehwir/buch.html

11. Mai 2000

Prädikatenlogik und Kalküle

Good, too, Logic, of course; in itself, but not in fine weather.
Arthur Hugh Clough 1819–1861

Die Logik muß für sich selber sorgen.
Ludwig Wittgenstein 1889–1951

- Syntax
- Semantik
- Kalküle

Anmerkung

ACHTUNG: Auf den Folien des Logikteils sind keine Beispiele angegeben!

Logik = LeGO Im Kopf

Hälfte aller Definitionen

Prädikatenlogik und Kalküle

Geschichte: Aristoteles, Leibniz, später Boole, Frege, Russell, **Hilbert**, Gödel

Philosophie *versus* Mathematik

Bsp.: Mengenlehre

- M sei die Menge $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\}$.
- M sei die Menge aller Primzahlen
- M sei die Menge aller Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten.

Hilbertsches Programm

Anmerkung

Aristoteles und Leibniz traditionelle Logik, stürmische Entwicklung dieses Jahrhundert mit den restlichen.

Frege: logische Formulierung der Mengentheorie

Russell: Beseitigung der Widersprüche

Hilbert: laßt uns rechnen

Gödel: Zerstört Hilbertsches Programm.

Die berühmte Russelformel lautet

$$\forall X \; [r(b, X) \leftrightarrow \neg r(X, X)],$$

wobei b für den Barbier des Dorfes steht und $r(X, Y)$ für die Aussage, daß Dorfbewohner X den Dorfbewohner Y rasiert.

Syntax - Alphabet

Definition 1 Das *Alphabet* für eine Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe:

- $\mathcal{P}$ endliche Menge von Prädikatensymbolen mit Stelligkeit.
- $\mathcal{F}$ endliche Menge von Funktionssymbolen mit Stelligkeit.
- $\mathcal{V}$ abzählbar unendliche Menge von Variablen.
- $\top$ (wahr) und $\bot$ (falsch)
- Menge von logischen Verknüpfungen: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- Quantoren: $\forall$ (Allquantor), $\exists$ (Existenzq.)
- Klammern und Kommata: „(“, „)“, „,“

$\mathcal{P}$ und $\mathcal{F}$ bilden die *Signatur* $\Sigma = (\mathcal{P}, \mathcal{F})$.

Anmerkung

Alphabet $\mathcal{A}$ = beliebige, abzählbare Menge. $\mathcal{A}^*$ = Menge aller Wörter, die über $\mathcal{A}$ gebildet werden können.

Beispiel: Vater, Mutter, Verwandschaft als Prädikate.

Die Prädikatensymbole werden mit $p, q, r, \ldots$ bezeichnet. Nullstellige Prädikatensymbole werden auch Aussagenvariablen (Propositionen) genannt.

Die Funktionssymbole werden mit $f, g, h, \ldots$ bezeichnet. Nullstellige Funktionssymbole werden auch Konstanten genannt.

Die Variablen werden mit $X, Y, Z, \ldots$ (mit oder ohne Index) bezeichnet.

Syntax - Terme

Definition 2 Die Menge $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$ der *Terme* ist die kleinste Menge mit:

i) Jede Variable aus $\mathcal{V}$ ist ein Term.

ii) Sind $t_1, \ldots, t_n$ $(n \geq 0)$ Terme und f ein n-stelliges Funktionssymbol aus Σ, dann ist auch $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term.

f wird auch Funktor genannt und mit f/n bezeichnet.

Nullstellige Funktionssymbole $f/0$ heißen *Konstanten*, und wir schreiben f statt $f()$.

Die Terme $t_1, \ldots, t_n$ heißen Argumente (Teil-, Unterterme) von f.

Anmerkung

Im folgenden sei eine Signatur Σ gegeben. Ausdrücke in Sprachen erster Stufe sind Terme und Formeln.

Terminduktion

Beispiel öffnend(t) und schließend(t) sei Anzahl öffnender und schließender Klammer von t

Satz Für alle Terme $t \in \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$ gilt:

$$\text{öffnend}(t) = \text{schließend}(t)$$

Beweis: durch Terminduktion.

- Induktionsanfang: Aussage gilt für alle Konstanten.
- Induktionsschritt: Aussage gilt für Terme $t_1, \ldots, t_n$, dann gilt Aussage auch für

  $$f(t_1, \ldots, t_n),$$

  wobei f/n ein Funktor ist.

Syntax - Formeln

Definition 3 Die Menge $\mathcal{A}(\Sigma, \mathcal{V})$ der *atomaren Formeln* (*Atome*) ist die kleinste Menge mit:

i) $\top, \bot \in \mathcal{A}(\Sigma, \mathcal{V})$

ii) $s \doteq t \in \mathcal{A}(\Sigma, \mathcal{V})$, falls $s, t \in \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$

iii) $p(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{A}(\Sigma, \mathcal{V})$, falls $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$ und p ein n-stelliges Prädikatensymbol.

Die Menge $\mathcal{F}(\Sigma, \mathcal{V})$ der *wohlgeformten Formeln* ist die kleinste Menge mit:

i) $\mathcal{A}(\Sigma, \mathcal{V}) \subseteq \mathcal{F}(\Sigma, \mathcal{V})$

ii) Sind $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(\Sigma, \mathcal{V})$, dann sind auch $\neg\varphi$, $\varphi \land \psi$, $\varphi \lor \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathcal{F}(\Sigma, \mathcal{V})$

iii) Ist $X \in \mathcal{V}$ und $\varphi \in \mathcal{F}(\Sigma, \mathcal{V})$, dann $\forall X \varphi$, $\exists X \varphi \in \mathcal{F}(\Sigma, \mathcal{V})$

Anmerkung

Formeln teilen sich in atomare und zusammengesetzte Formeln auf.

Die Terme $t_1, \ldots, t_n$ heißen Argumente von P.

Wir benutzen $\doteq$ als objektsprachliches Symbol für das Gleichheitsprädikat, um Verwechslungen mit der metasprachlichen Gleichheit $=$ vorzubeugen. Die Gleichheit $\doteq$ ist kein beliebiges binäres Prädikat, sondern wird als Identität interpretiert.

Syntax - Formeln mit Quantoren

Definition 4 Sei $\varphi = \forall X \psi$ oder $\varphi = \exists X \psi$, so ist ψ der *Geltungsbereich* (engl. scope) von $\forall X$ bzw. $\exists X$. Ein Vorkommen von X in ψ heißt *gebunden.* Variable in einer Formel sind gebunden, falls sie nur im Geltungsbereich von Quantoren vorkommen. Sonstige Vorkommen einer Variablen heißen *frei.* Formeln ohne freie Variablen heißen *(ab)geschlossen* oder *Sätze.*

Definition 5 *Die Menge der* freien Variablen einer Formel ψ *is induktiv definiert durch:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{frei}(t_1 \doteq t_2) &:= \mathrm{var}(t_1) \cup \mathrm{var}(t_2) \\
\mathrm{frei}(p(t_1, \ldots, t_n)) &:= \mathrm{var}(t_1) \cup \ldots \cup \mathrm{var}(t_n) \\
\mathrm{frei}(\neg\psi) &:= \mathrm{frei}(\psi) \\
\mathrm{frei}(\psi_1 * \psi_2) &:= \mathrm{frei}(\psi_1) \cup \mathrm{frei}(\psi_2) \; * \in \{\vee, \wedge, \ldots\} \\
\mathrm{frei}(\forall x \psi) &:= \mathrm{frei}(\psi) \setminus \{x\} \\
\mathrm{frei}(\exists x \psi) &:= \mathrm{frei}(\psi) \setminus \{x\}
\end{aligned}$$

Syntax - Formeln mit Quantoren

Definition 6 Sei ψ eine Formel und $\{X_1, \ldots, X_n\}$ die Menge der freien Variablen von ψ. Der *universelle Abschluß* $\tilde{\forall}\ \psi$ und der *existentielle Abschluß* $\tilde{\exists}\ \psi$ der Formel ψ (engl. closure) ist wie folgt definiert:

$$\tilde{\forall}\psi \ = \ \forall X_1 \ldots \forall X_n \ \psi$$

$$\tilde{\exists}\psi \ = \ \exists X_1 \ldots \exists X_n \ \psi$$

Zusammenfassung Syntax - Terme und Formeln Gegeben: Signatur $\Sigma = (\mathcal{P}, \mathcal{F})$, mit endliche Menge von Prädikatensymbolen $\mathcal{P}$ (bzw. Funktionssymbolen $\mathcal{F}$), und abzählbar unendliche Menge $\mathcal{V}$ von Variablen.

Definition 7 Die Menge $\mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$ der *Terme*:
- Jede Variable aus $\mathcal{V}$ ist ein Term.
- Sind $t_1, \ldots, t_n$ $(n \geq 0)$ Terme und $f \in \mathcal{F}$, dann ist auch $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term.

Die Menge $\mathcal{F}(\Sigma, \mathcal{V})$ der *wohlgeformten Formeln*:
- $\top, \bot \in \mathcal{F}(\Sigma, \mathcal{V})$
- $s \doteq t \in \mathcal{F}(\Sigma, \mathcal{V})$, falls $s, t \in \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$
- $p(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}(\Sigma, \mathcal{V})$, falls $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$ und $p \in \mathcal{P}$.
- $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathcal{F}(\Sigma, \mathcal{V})$, falls $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(\Sigma, \mathcal{V})$.
- $\forall X \varphi$, $\exists X \varphi \in \mathcal{F}(\Sigma, \mathcal{V})$, falls $X \in \mathcal{V}$ und $\varphi \in \mathcal{F}(\Sigma, \mathcal{V})$.

Syntax - Normalformen

Definition 8 Eine Formel ist in *pränexer Normalform*, falls sie die Gestalt $Q_1X_1 \ldots Q_nX_n(F)$ hat, wobei $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ ist und kein Quantor in F vorkommt.
$Q_1X_1 \ldots Q_nX_n$ heißt *Präfix* und F die *Matrix* der Formel.

Anmerkung

Einige Beweisverfahren in der Logik werden auf Formeln in einer Normalform angewendet, um die Algorithmisierung zu erleichtern. In diesem Abschnitt wird die Klauselnormalform eingeführt.

Syntax - Normalformen

Definition 9 Ein *Literal* ist ein Atom ψ (*positives Literal*) oder ein negiertes Atom $\neg\psi$ (*negatives Literal*).

Definition 10 Eine Formel in pränexer Normalform ist in *konjunktiver Normalform*, falls ihre Matrix eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist:

$$Q_1 X_1 \dots Q_n X_n \bigwedge_{i=1}^{n} (\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij}),$$

wobei $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ und L_{ij} ein Literal ist.

Syntax - Normalformen

Definition 11 Eine Formel ist in *Klauselnormalform*, wenn sie in konjunktiver Normalform ist und ihr Präfix keine Existenzquantoren enthält:

$$\forall X_1, \ldots, \forall X_m \bigwedge_{i=1}^{n} (\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij})$$

Die Disjunktion einer oder mehrerer Literale nennt man eine *Klausel*.

Anmerkung

Bei der Bildung der Klauselnormalform einer Formel werden die existentiellen Quantoren durch Einführung von *Skolem-Funktionen* eliminiert.

Semantik - Interpretation

Definition 12 Eine *Interpretation* $\mathcal{I}$ ist ein Paar (D,$\mathcal{I}[.]$) mit:

- D ist eine nichtleere Menge („Universum“ oder „Definitionsbereich“).
- $\mathcal{I}[f] : D^n \to D$ für jedes n-stellige Funktionssymbol f.
- $\mathcal{I}[p] \subseteq D^n$, für jedes n-stellige Prädikatensymbol p.

Definition 13 Eine *Variablenbelegung* (engl. valuation) für die Variablenmenge $\mathcal{V}$ bzgl. eines Universums D ist eine Abbildung $\alpha : \mathcal{V} \to D$.

Anmerkung

Nachdem die Syntax einer Sprache der Prädikatenlogik definiert ist, muß die Semantik einer Formel geklärt werden, nämlich wann eine Formel erfüllt ist. Dazu führen wir den Begriff der Interpretation ein. Eine Interpretation ordnet den Funktionssymbolen der Sprache Objekte zu und den Prädikatensymbolen Relationen über Objekte.

Interpretation von Termen Wenn $\mathcal{I}$ eine Interpretation und α eine Variablenbelegung ist, bezeichnet $\mathcal{I}_\alpha$ folgende Interpretation (Auswertung) von Termen:

- $\mathcal{I}_\alpha[X] = \alpha(X)$ für $X \in \mathcal{V}$
- $\mathcal{I}_\alpha[f(t_1, \ldots, t_n)] = \mathcal{I}[f](\mathcal{I}_\alpha[t_1], \ldots, \mathcal{I}_\alpha[t_n])$ für ein n-stelliges Funktionssymbol f und Terme $t_1, \ldots, t_n$.

Für die Interpretation von Formeln benötigen wir folgende Hilfsdefinition. Zu einer Funktion g bezeichnet $g_{[Y \hookleftarrow a]}$ die Funktion

$$g_{[Y \hookleftarrow a]}(X) = \begin{cases} a, \text{ falls } X = Y \\ g(X), \text{ sonst} \end{cases}$$

Interpretation von Formeln Die Relation $\mathcal{I}_\alpha \models \varphi$ („$\mathcal{I}_\alpha$ erfüllt φ“) ist definiert durch:

- $\mathcal{I}_\alpha \models \top$; • $\mathcal{I}_\alpha \not\models \bot$;
- $\mathcal{I}_\alpha \models s \doteq t$ gdw. $\mathcal{I}_\alpha(s) = \mathcal{I}_\alpha(t)$;
- $\mathcal{I}_\alpha \models p(t_1, \ldots, t_n)$ gdw. $(\mathcal{I}_\alpha[t_1], \ldots, \mathcal{I}_\alpha[t_n]) \in \mathcal{I}_\alpha[p]$;
- $\mathcal{I}_\alpha \models \neg\varphi$ gdw. $\mathcal{I}_\alpha \not\models \varphi$;
- $\mathcal{I}_\alpha \models \varphi \wedge \psi$ gdw. $\mathcal{I}_\alpha \models \varphi$ und $\mathcal{I}_\alpha \models \psi$;
- $\mathcal{I}_\alpha \models \varphi \vee \psi$ gdw. $\mathcal{I}_\alpha \models \varphi$ oder $\mathcal{I}_\alpha \models \psi$;
- $\mathcal{I}_\alpha \models \varphi \rightarrow \psi$ gdw. $\mathcal{I}_\alpha \not\models \varphi$ oder $\mathcal{I}_\alpha \models \psi$;
- $\mathcal{I}_\alpha \models \varphi \leftrightarrow \psi$ gdw. entweder $\mathcal{I}_\alpha \models \varphi$ und $\mathcal{I}_\alpha \models \psi$ oder $\mathcal{I}_\alpha \not\models \varphi$ und $\mathcal{I}_\alpha \not\models \psi$;
- $\mathcal{I}_\alpha \models \forall X \varphi$ gdw. für alle $u \in D$ gilt $\mathcal{I}_{\alpha[X \hookleftarrow u]} \models \varphi$;
- $\mathcal{I}_\alpha \models \exists X \varphi$ gdw. für ein $u \in D$ gilt $\mathcal{I}_{\alpha[X \hookleftarrow u]} \models \varphi$

Semantik - Modell

Definition 14 $\mathcal{I}$ ist ein *Modell* von φ, geschrieben $\mathcal{I} \models \varphi$, falls $\mathcal{I}_\alpha \models \varphi$ für alle Variablenbelegungen α gilt. Ist M eine Formelmenge, so heißt $\mathcal{I}$ *Modell* von M, falls $\mathcal{I} \models \varphi$ für alle $\varphi \in M$.

$\models$ ist semi-entscheidbar (Church).

Semantik - Erfüllbarkeit

Definition 15 Eine Formel φ ist *erfüllbar* (konsistent), falls sie wenigstens ein Modell hat. Eine Formelmenge M ist *erfüllbar*, falls sie ein Modell hat.

Definition 16 Eine Formel φ ist eine *Tautologie* (*allgemeingültig*), falls $\mathcal{I} \models \varphi$ für alle Interpretationen $\mathcal{I}$.

Semantik - Folgerungsbegriff

Definition 17 Aus einer Formel φ *folgt* eine Formel ψ, in Zeichen $\varphi \models \psi$, wenn jedes Modell von φ auch Modell von ψ ist. Die gleiche Definition gilt, wenn φ eine Formelmenge ist.

Definition 18 Zwei Formeln φ und ψ sind *logisch äquivalent*, $\varphi \models\!\mid \psi$, falls $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \varphi$.

Semantik - Theorie

Definition 19 Sei Σ eine Signatur.

a) Eine *Theorie* $\mathcal{T}$ ist eine Menge von Sätzen.

b) Eine Theorie $\mathcal{T}$ heißt *vollständig* (engl. complete), falls für jede abgeschlossene Formel φ gilt: $\mathcal{T} \models \varphi$ oder $\mathcal{T} \models \neg\varphi$.

Semantik - Herbrand

Definition 20 Das *Herbrand-Universum* H_Σ ist die Menge aller variablenfreien Terme.

Definition 21 Eine *Herbrand-Interpretation* ist eine Interpretation $\mathcal{H} = (H_\Sigma, \mathcal{I}[.])$, die jedem n-stelligen Funktionssymbol f eine Funktion $\mathcal{I}[f]: H_\Sigma^n \to H_\Sigma$ zuordnet, die die Terme $t_1, \ldots, t_n \in H_\Sigma$ auf den Term (als Zeichenkette) $f(t_1, \ldots, t_n) \in H_\Sigma$ abbildet. Die Interpretation der Prädikatensymbole unterliegt keiner Einschränkung.

Anmerkung

Nach der Definition 15 ist eine Formel φ unerfüllbar (inkonsistent) genau dann, wenn $\mathcal{I} \not\models \varphi$ für jede Interpretation, also insbesondere für jeden Bereich D. Beim Beweis für die Unerfüllbarkeit von φ wäre es jedoch von großem Nutzen, wenn man eine eingeschränkte Klasse $\mathcal{I}$ von Interpretationen so bestimmen könnte, daß φ in $\mathcal{I}$ genau dann erfüllbar, wenn A in irgendeiner Interpretation erfüllbar ist. Tatsächlich gibt es einen solchen Bereich, das Herbrand-Universum.

Substitutionen

Definition 22 Eine *Substitution* ist eine Abbildung von der Menge der Variablen in die Menge der Terme $\theta : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$. Wir schreiben θ als eine endliche Menge von Paaren wie folgt: $\theta = \{\ldots, X_i \hookleftarrow t_i, \ldots\}$, wobei $X_i \in \mathcal{V}$, $t_i \in \mathcal{T}(\Sigma, \mathcal{V})$ und die Paare der Form $X \hookleftarrow X$ weggelassen werden. Die Identität (leere Substitution) wird mit ϵ bezeichnet.

Definition 23 Sei $\theta = \{X_1 \hookleftarrow t_1, \ldots, X_n \hookleftarrow t_n\}$ eine Substitution und A eine Formel ohne Quantoren (bzw. ein Term). Dann ist $A\theta$, eine *Instanz* von A, die Formel (bzw. der Term), die aus A durch gleichzeitiges Ersetzen jedes Vorkommen der Variablen X_i in A durch den Term t_i $(i = 1, \ldots, n)$ entsteht.

Unifikation

Definition 24 Eine Substitution θ heißt *Unifikator* für eine Menge $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, falls $A_1\theta = A_2\theta = \ldots = A_n\theta$. Gibt es für S einen solchen Unifikator, dann heißt S *unifizierbar*. Ein Unifikator θ heißt *allgemeinster Unifikator* (engl. most general unifier, mgu) für S, wenn es für jeden Unifikator σ von S eine Substitution α gibt, sodaß $\sigma = \theta\alpha$.

Anmerkung

Eine besondere Rolle spielt die Unifikation. Ihre Aufgabe ist es, zwei Atome oder Terme einander anzugleichen. Diese Operation spielt insbesondere beim Resolutionskalkül eine wesentliche Rolle.

Motivation Kalküle

Wir verwenden Kalküle um zu beschreiben, wie mit einer Logik ge-/berechnet werden kann.

1. Eine Logik: Formale Sprache zur Darstellung von Aussagen.
   Syntax und Semantik von Formeln. Präzise Definition der Folgerungsbeziehung $\varphi \models \psi$.

2. Ein Kalkül: syntaktische Schlußregeln für eine Logik.
   Ableitbarkeit $\varphi \vdash \psi$.
   Idealerweise fallen $\models$ und $\vdash$ zusammen.

Kalküle

Ein Kalkül stellt logische Axiome (vorgegebene Formeln) und Schlußregeln der folgenden Form zur Verfügung:

$$\frac{\varphi_1 \cdots \varphi_n}{\psi}$$

$\varphi_1 \ldots \varphi_n$: Prämisse der Schlußregel (endlich)

ψ: Konklusion der Schlußregel

Anwendung: wenn Prämisse gegeben oder bereits abgeleitet sind, wird Konklusion hinzugefügt („abgeleitet").

Ableitbarkeitsbeziehung: $\varphi \vdash \psi$ falls ψ durch (aufeinanderfolgende) Anwendung von Schlußregeln aus φ ableitbar ist.

Wichtige Eigenschaften:

Korrektheit: wenn $\varphi \vdash \psi$ dann $\varphi \models \psi$

Vollständigkeit: wenn $\varphi \models \psi$ dann $\varphi \vdash \psi$

Resolutionskalkül

Dieses Kalkül behandelt Klauseln.

Ein logisches Axiom: leere Klausel $\Box$ = falsch

Zwei Schlußregeln:

Resolution:

$$\frac{\begin{array}{ll} L \vee L_1 \vee \ldots \vee L_n & \sigma \text{ ist allgemeinster} \\ \neg L' \vee M_1 \vee \ldots \vee M_m & \text{Unifikator von } L, L' \end{array}}{(L_1 \vee \ldots \vee L_n \vee M_1 \vee \ldots \vee M_m)\sigma}$$

Faktorisierung:

$$\frac{\begin{array}{ll} & \sigma \text{ ist allgemeinster} \\ L \vee L' \vee M_1 \vee \ldots \vee M_m & \text{Unifikator von } L, L' \end{array}}{(L \vee M_1 \vee \ldots \vee M_m)\sigma}$$

Kalküle - Zustandsübergangssystem

Ein Kalkül hat bei uns drei Komponenten: Zustände, eine Kongruenzrelation, ein Zustandsübergangssystem.

Definition 25 Ein *Zustandsübergangssystem* (engl. transition system) ist ein Tripel $(\mathcal{Z}, \mathcal{T}, \mapsto)$, wobei $\mathcal{Z}$ eine Menge von Zuständen ist, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{Z}$ die Menge der terminalen Zustände (Anfangs- und Endzustände, engl. initial and final states) und $\mapsto \subseteq \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ die Übergangsrelation, für die gilt:
Für alle Endzustände $S \in \mathcal{T}$ und für alle $S' \in \mathcal{Z}$ gilt $S \not\mapsto S'$.

Anmerkung

Ein Kalkül besteht bei uns aus drei Komponenten: Einer Menge von Zuständen $\mathcal{Z}$, einer Kongruenz, die triviale Gleichheiten in $\mathcal{Z}$ beschreibt, und einem Zustandsübergangssystem, das die Abarbeitung eines Programms durch Zustandsübergänge beschreibt.

Von Endzuständen aus ist kein Zustandsübergang möglich.

Kalküle - Zustandsübergang

Eine *Reduktion* (Zustandsübergang, Ableitungsschritt) von einem *(Ausgangs-)Zustand* S zu einem *(Folge-)Zustand* S' kann erfolgen, wenn bestimmte *(Reduktions-)Bedingungen* erfüllt sind. Wir schreiben dies als *Ableitungsregel (Inferenzregel)* von der Form:

$$\frac{\begin{array}{c} < \text{Bedingung } 1 > \\ \ldots \\ < \text{Bedingung } n > \end{array}}{S \mapsto S'}$$

Triviales Zustandsübergangssystem

für ein Kalkül einer Logik:

- Zustand = Menge von Formeln der Logik
- Anfangs-/Endzustand: gewünschte Formel/ logische Axiome.
- für jede Schlußregel

  $$\frac{\varphi_1 \cdots \varphi_n}{\psi}$$

  ein Zustandsübergang

  $$\frac{\begin{array}{c}\varphi_1 \in S \\ \cdots \\ \varphi_n \in S\end{array}}{S \mapsto S \cup \{\psi\}}$$

Zustandsübergangssystem für Resolutionskalkül

- Zustand = Klauselmenge
- Anfangszustand = Klauselform von

  $$Annahmen \wedge \neg Behauptung$$

  Endzustand = jede Klauselmenge, die $\square$ enthält
- Zustandsübergang

$$\frac{\begin{array}{c} C1 \in S \\ C2 \in S \\ \text{resolvierbar}(C1, C2) \end{array}}{S \mapsto S \cup \{\text{resolvente}(C1, C2)}$$

$$\frac{\begin{array}{c} C \in S \\ \text{faktorisierbar}(C) \end{array}}{S \mapsto S \cup \{\text{faktor}(C)}$$

Kalküle - Berechnung

Definition 26 Eine *Berechnung* (engl. computation) ist eine Sequenz $S_0 \mapsto S_1 \mapsto S_2 \mapsto \ldots$ von Reduktionen. Wir schreiben $S \mapsto^n T$, falls es $S_0, \ldots, S_n$ gibt mit $S = S_0$, $T = S_n$ und $S_i \mapsto S_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, n-1)$. Wir schreiben $S \mapsto^* T$, wenn es ein $n \geq 0$ gibt mit $S \mapsto^n T$.
Eine *Ableitung* (engl. derivation) ist eine Berechnung, die entweder in einem Endzustand endet oder unendlich ist.

Kalküle - Kongruenz

Definition 27 Eine *Äquivalenzrelation* $\equiv$ ist eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist:

(Reflexivität)	$A \equiv A$
(Symmetrie)	Wenn $A \equiv B$ dann auch $B \equiv A$
(Transitivität)	Wenn $A \equiv B$ und $B \equiv C$ dann auch $A \equiv C$

Definition 28 Eine *Kongruenz* $\equiv$ *über Formeln* ist eine Äquivalenzrelation, für die zusätzlich gilt:
Wenn $\varphi \equiv \psi$ dann auch $\neg\varphi \equiv \neg\psi$ und wenn $\varphi \equiv \psi$ und $\varphi' \equiv \psi'$ dann auch $\varphi \rightarrow \varphi' \equiv \psi \rightarrow \psi'$.

Anmerkung

Wenn also Teilformeln zueinander kongruent sind, sind auch die daraus zusammengesetzten Formeln kongruent. Eine Kongruenz wird hier dazu verwendet, um triviale Äquivalenzen von Formeln (z.B. zwischen $A \wedge B$ und $B \wedge A$) implizit ausnützen zu können. Wir erweitern die Kongruenz über Formeln auf eine Kongruenz über Zuständen wie folgt: Zwei Zustände sind kongruent, wenn ihre Komponenten kongruent sind. Ist ein Zustandsübergang mit bestimmten Zuständen möglich, so ist er auch mit allen dazu kongruenten Zuständen erlaubt.

Kalküle

Definition 29 Ein *(logischer) Kalkül* ist ein Tripel $(\Sigma, \equiv, (\mathcal{Z}, \mathcal{T}, \mapsto))$, wobei gilt:

- Σ ist eine Signatur für eine Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe.
- $\equiv$ ist eine Kongruenz über Formeln über der Signatur Σ.
- $(\mathcal{Z}, \mathcal{T}, \mapsto)$ ist ein Zustandsübergangssystem.